Colles de Maths - semaine 4 - MP*2
Lycée du Parc

Julien Allasia - ENS de Lyon

Intégrales

Exercice 1 (*) Etudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\, dt$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}+\cos t}\, dt$

Exercice 2 (*) Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b pour que l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^a)}{x^b}\, dx.$$

Exercice 3 (*) Pour quels réels α la fonction

$$f : x \mapsto x^\alpha \int_0^x \sqrt{\frac{t}{1+t^2}}\, dt$$

est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 4 (**) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f et f'^2 sont intégrables.
Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 5 (***) Soit $n \geq 2$ et $a_1 < b_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < b_{n-1} < a_n$ des réels.
On définit pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{b_1, ..., b_{n-1}\}$,

$$\phi(x) = \frac{\prod_{i=1}^n (x-a_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (x-b_i)}.$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue à support bornée. Montrer qu'alors $f \circ \phi$ l'est également et vérifie

$$\int_{\mathbb{R}} f \circ \phi = \int_{\mathbb{R}} f.$$

Séries

Exercice 6 (*) Quelle est la nature des séries suivantes ?

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \int_0^n \frac{\operatorname{Arctan} t}{1+t}\, dt$, en fonction de $\alpha > 0$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \cos\left(n^2\, \pi \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{\binom{n}{3}}}{n}$;

4. $\sum_{n\geq 1} (-1)^n\, f(1/n)$ où $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$;
5. $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n^n\, a^n}{\sum_{k=1}^n k!}$ en fonction de $a > 0$.

Exercice 7 (*) Quelle est la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{(\ln(n+1))^2}{\ln n\, \ln(n+2)}\right)$? Calculer sa somme.

Exercice 8 (*) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictements positifs. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et en cas d'existence $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$.

1. Si $\sum u_n$ diverge, montrer que $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$.
2. Si $\sum u_n$ converge, montrer que $\sum \dfrac{u_n}{R_n^\alpha}$ converge $\iff \alpha < 1$.
3. Application : Remontrer le critère de Bertrand à l'aide de 1.

Exercice 9 (**, calculatoire) Trouver un équivalent quand n tend vers l'infini de

$$u_n = \left(\prod_{k=1}^{n} k^k\right)^{1/n}.$$

Exercice 10 (**) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite positive décroissante qui tend vers 0. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ sont de même nature, et qu'en cas de convergence leurs sommes sont égales.

Conséquence (qui découle aussi de Fubini) : Si $\sum u_n$ est une série convergente à termes positifs, et si $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$, alors $\sum R_n$ et $\sum n\, u_n$ ont même nature et en cas de convergence, leurs sommes sont égales.

Généralités de topologie

Exercice 11 (*) Soit E un espace vectoriel normé (ou métrique). Soit D une partie dense de E. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application continue qui admet un prolongement continu à $D \cup \{x\}$ pour tout $x \in E$. Montre que f admet un prolongement continu sur E.

Exercice 12 (*) Soit E un espace vectoriel normé (ou un espace métrique). Soit A et B deux parties non vides disjointes de E. On définit la distance de A à B par

$$d(A,B) = \inf_{(x,y)\in A\times B} d(x,y).$$

1. On suppose A fermé. A-t-on $d(A,B) > 0$? Et si l'on suppose B fermé ? réduit à un point ?
2. Si A et B sont fermés, montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subseteq U$ et $B \subseteq V$.

Exercice 13 (*) Soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de $||.||_\infty$ et

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C},\ f(0) = f(1) = 0 \text{ et } \int_0^1 f = 1 \right\}.$$

Montrer que E est fermé mais que la distance de 0 à E n'est pas atteinte.